Kombinatorik

LERNBLÄTTER

Kurzfassung des Textes 31011

Datei Nr. 33 150

Stand 8. März 2017

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Was macht Kombinatorik

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der Mathematik, in der es darum geht, Anzahlen von *Kombinationen* und *Variationen* zu berechnen. Eine solche Auswahl von Objekten aus einer Grundmenge ist ein k-stufiger Prozess. In jeder Stufe gibt es eine bestimmte Anzahl von Möglichkeiten. Kennt man die Anzahl der Möglichkeiten in jeder Stufe, dann erhält man die Gesamtzahl der Möglichkeiten durch die

Produktregel der Kombinatorik

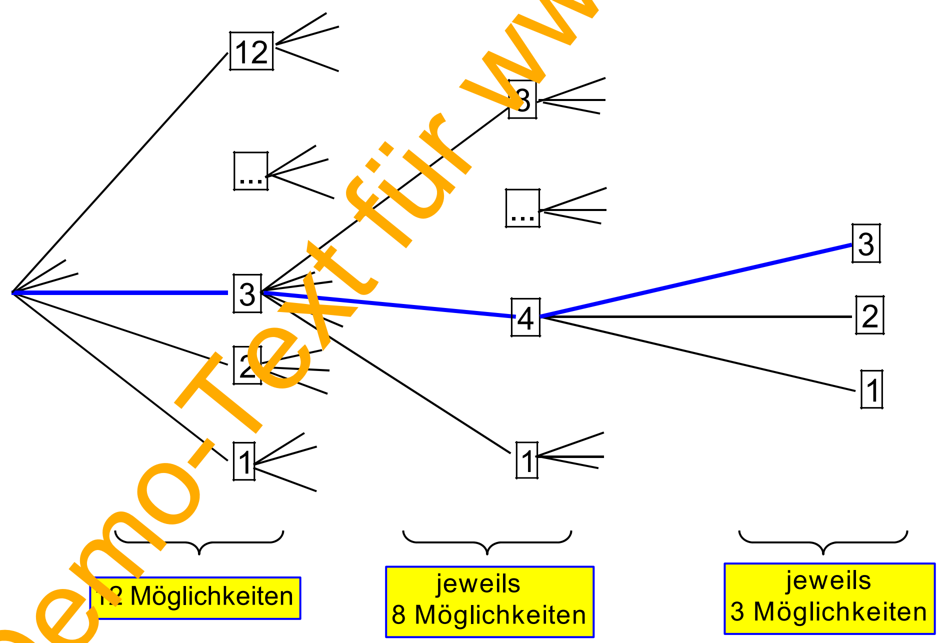
Wird ein Experiment in k Stufen durchgeführt,
und sind die Anzahlen der möglichen Ergebnisse
in diesen Stufen $m_1, m_2, \ldots, m_k$,

dann hat das Experiment $\boxed{m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k}$ mögliche Ergebnisse.

Hat man also bei einer Auswahl für die erste Stufe 12 Möglichkeiten, bei der 2. Stufe 8 Möglichkeiten und bei der dritten Stufe noch 3 Möglichkeiten, dann werden diese Anzahlen multipliziert:

Es gibt $\mathbf{m = 12 \cdot 8 \cdot 3 = 288}$ Möglichkeiten.

Manche wollen diese Möglichkeiten addieren, was aber falsch ist. Anhand eines Baumdiagramms wird klar, warum multipliziert werden muss.



Der blaue Pfad zeigt an, dass in der ersten Stufe das 3. Objekt ausgewählt worden ist, in der zweiten Stufe das 4. und in der letzten Stufe das 3. Element.

Insgesamt könnte man $\mathbf{m = 12 \cdot 8 \cdot 3 = 288}$ Pfade einzeichnen ☺.

Die vier Problemstellungen der Kombinatorik

Die Aufgabenstellung lautet:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, k aus n Objekten auszuwählen.

Dabei gibt es **vier unterschiedliche Auswahlverfahren**, die ich an einigen Beispielen schildere.

1. Art	Mit Beachtung der Reihenfolge	(= Variation)	mit Wiederholungen
2. Art	Mit Beachtung der Reihenfolge	(= Variation)	ohne Wiederholungen
3. Art	Ohne Beachtung der Reihenfolge	(= Kombination)	ohne Wiederholungen
4. Art	Ohne Beachtung der Reihenfolge	(= Kombination)	mit Wiederholungen

Übersicht:

Variationen:

1. Art

Auswahl
unter Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholungen

Geordnete Stichprobe mit Wiederholung

$\mathbf{m = n^k}$

n - Tupel

2. Art

Auswahl
unter Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholungen

Geordnete Stichprobe ohne Wiederholung

$$m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ Faktoren}} = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{nPr(n,k)}_{\text{Rechner}}$$

k - Permutationen

Kombinationen

4. Art

Auswahl
ohne Beachtung der Reihenfolge
mit Wiederholungen

Ungeordnete Stichprobe mit Wiederholung

$$m = \binom{n+k-1}{k}$$

k - Kombination

3. Art

Auswahl
ohne Beachtung der Reihenfolge
ohne Wiederholungen

Ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholung

$$m = \binom{n}{k} = \underbrace{nCr(n,k)}_{\text{Rechner}}$$

Platzauswahl

Weitere Formeln für den Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

Auswahlart 1: Variationen mit Wiederholungen
(Geordnete Stichproben mit Wiederholung)

Beispiel: Ich verlose 3 Bücher unter 20 Personen. Dabei ist es möglich, dass eine Person mehrfach ausgewählt wird. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Lösung: Da in jeder Stufe alle Personen zur Verfügung stehen, kann man jeden Gewinner aus diesen 20 Personen auswählen.
Für das 1. Buch 20, für das 2. Buch 20 und für das 3. Buch 20:
Nach der Produktregel ergibt das $m = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^3$ Möglichkeiten.

Formel: Hat man bei einer geordneten Stichprobe (Auswahl) von k Objekten in jeder Stufe n Elemente zur Auswahl, dann gibt es

$$\boxed{m = n^k}$$

Auswahlmöglichkeiten

Auswahlart 2: Variationen ohne Wiederholungen
(Geordnete Stichproben ohne Wiederholung)

1. Fall: Alle Elemente werden ausgewählt: Permutationen

Beispiel: Ergebnislisten erstellen

12 Kinder laufen die 100 m – Strecke in *unterschiedlichen* Zeiten. Ihre Namen sollen in einer Liste aufgeschrieben werden, der schnellste Schüler steht oben, der langsamste unten. Wie viele Listen sind möglich?

Lösung: Für den Sieger (Platz 1) gibt es 12 Möglichkeiten,
für den 2. Platz noch 11
für den 3. Platz noch 10
…
für den letzten noch 1.

Dies sind insgesamt $m = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$ Möglichkeiten.

Formel: n Elemente kann man auf n Fakultät Arten anordnen (permutieren),

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

Sonderfall: Permutationen mit gleichen Objekten

Beispiel: Bücher aufstellen

Auf wie viele Arten kann man 8 Bücher anordnen. wenn darunter 3 gleiche sind?

Trick: Man gibt den drei gleichen Büchern zunächst die Nummern 1, 2 und 3. Dann hat man 8 unterscheidbare Bücher mit $8! = 40320$ Anordnungsmöglichkeiten. Nimmt man anschließend die Nummern wieder ab, kann man in jedem dieser Fälle die drei gleichen Bücher umordnen, ohne dass es optisch auffällt. Da man 3 Objekte auf 3! = 6 Arten permutieren kann, haben stets 6 solcher speziellen Umordnungen optisch dieselbe Anordnung. Also muss man die Anzahl durch 3! = 6 dividieren:

$$m = \frac{8!}{3!} = 6720 \text{ Möglichkeiten.}$$

Formel:

Befinden sich unter n Objekten n_1 gleiche von der Sorte 1, n_2 gleiche von der Sorte 2, …, k gleich Obkjekte der Sorte k, dann lassen sich diese n Objekte auf so viele Arten anordnen:

$$\boxed{m = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

2. Fall: Geordnete Stichprobe von k Elementen aus n ohne Wiederholung

Beispiel: Kinobesuch

5 Personen kommen ins Kino und finden in einer Reihe genau 9 freie Plätze vor. Auf wie viele Arten können sie sich hinsetzen?

Lösung: Wir beobachten was dabei passiert:
Person 1 wählt sich seinen Platz aus, er hat dazu 9 Möglichkeiten.
Person 2 stehen dann noch 8 Plätze zur Verfügung.
Person 3 wählt aus 7 Plätzen aus. Person 4 wählt aus 6 Plätzen aus.
Person 5 kann dann noch aus 5 Plätzen auswählen.

Das ergibt: $m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ Möglichkeiten. (Teilpermutationen)

Formeln: Das Produkt $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ ist eine Teilpermutation, die man auf unterschiedliche Art berechnen kann (siehe Abschnitt 1):

(1) $$m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \boxed{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{1 \cdot \boxed{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{9!}{4!}$$

Hier wurde das Produkt als Bruch mit dem Nenner 1 geschrieben. Dieser wurde dann so erweitert, dass im Zähler 9! entsteht, also mit 4!

(2) Den k-ten Faktor kann man durch **n - k + 1** berechnen:
Hier: Der 5. Faktor ist $9 - 5 + 1 = 5$.

(3) Geeignete Rechner besitzen für diese Formel eine spezielle Funktion. Diese ist mit nPr(n,k) abgekürzt.

Für die Rechnung in (1) gibt man dann ein: nPr(9,5) und erhält 151209.

(4) **Geordnete Stichprobe (Variation) ohne Wiederholung:**

$$m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \overbrace{(n-k+1)}^{\text{k-ter Faktor}}}_{\text{k Faktoren}} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{= nPr(n,k)}_{\text{Rechner}}$$

Auswahlart 3: Kombinationen ohne Wiederholung

(Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung)

Beispiel: Platzauswahl

5 Personen kommen ins Kino und finden in einer Reihe genau 9 freie Plätze vor.
Auf wie viele Arten können die Plätze ausgewählt werden?

Lösung: Wir beobachten was dabei passiert:

Für die 1. Auswahl stehen 9 Plätze zur Verfügung.
Für die 2. Stufe noch 8, für die 3. Stufe noch 7, für die 4. Stufe noch 6
und für die 5. Stufe hat man noch 5 Plätze zur Auswahl.

Achtung: Die Formel $m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ liefert ein falsches Ergebnis, denn sie berücksichtigt auch unterschiedliche Ziehungsreihenfolgen für dieselbe Platzauswahl.

Da man 5 Objekte auf 5! = 120 Arten permutieren kann, gibt es für jede ausgewählte Platzgruppe 120 verschiedene Ziehungsreihenfolgen. Also muss man die Anzahl $m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ durch 120 dividieren. Die Formel für die Platzauswahl lautet also:

$$m = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!}$$

Man kann diesen Bruch so erweitern, dass im Zähler eine Fakultät entsteht:

$$m = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \boxed{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{5! \cdot \boxed{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{9!}{5! \cdot 4!}$$

Geeignete Rechner haben dazu diesen Rechenbefehl: nCr(9,5)

Man kürzt diesen Bruch auch mit $\binom{9}{5}$ ab, gelesen „9 über 5“.

Dieses Symbol heißt **Binomialkoeffizient.** Er wird so berechnet:

Die untere Zahl gibt an, wie viele Faktoren im Zähler stehen, beginnend mit der oberen Zahl.
Dann wird noch durch die Fakultät der unteren Zahl dividiert.

Formel: Ungeordnete Stichprobe (=Kombination) ohne Wiederholung

Für die Berechnung der Möglichkeiten, k Objekte aus n auszuwählen, wobei kein Objekt wiederholt wird und die Auswahlreihenfolge keine Rolle spielt verwendet man den **Binomialkoeffizienten**:

$$m = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \underbrace{nCr(n,k)}_{\text{Rechnerbefehl}}$$

Wichtigste Anwendung ist die Platzauswahl

Hinweis: Wenn sich Personen die Plätze auswählen und sich dann hinsetzen, dann spielt die Reihenfolge doch eine Rolle, und dann gibt es $m = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ Möglichkeiten.

Auswahlart 4: Kombinationen mit Wiederholung
(Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung)

Beispiel Getränkeauswahl

Der Eintritt in einer Disco beinhaltet drei Getränke, die man sich selbst zusammenstellen kann. Zur Auswahl stehen: **A**pfelsaft, **C**ola, **K**iba und **W**asser. Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es.
Schreibe die unterschiedlichen Möglichkeiten auf und berechne ihre Anzahl.

Formel: Es gibt $\mathbf{m = \binom{n+k-1}{k}}$ Kombinationen mit Wiederholung.

Lösung: Wählt man also 3 Objekte aus 4 Objekten aus, wobei Wiederholungen möglich sind und die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle spielt, denn geht das auf

$$m = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{6}} = 20 \text{ Arten.}$$

Die Auflistung der der Auswahlgetränke erfordert eine gewisse Systematik.

Zur Verfügung steht die Grundmenge $G = \{A, C, K, W\}$

Ich wähle zuerst die Tripel aus, die mit A beginnen, dann die mit B usw.

Das ergibt:

$$S = \left\{ \begin{array}{r} (A\,|\,A\,|\,A);(A\,|\,A\,|\,C);(A\,|\,A\,|\,K);(A\,|\,A\,|\,W) \\ (A\,|\,C\,|\,C);(A\,|\,C\,|\,K);(A\,|\,C\,|\,W) \\ (A\,|\,K\,|\,K);(A\,|\,K\,|\,W) \\ (A\,|\,W\,|\,W) \\ (C\,|\,C\,|\,C);(C\,|\,C\,|\,K);(C\,|\,C\,|\,W) \\ (C\,|\,K\,|\,K);(C\,|\,K\,|\,W) \\ (C\,|\,W\,|\,W) \\ (K\,|\,K\,|\,K);\ (K\,|\,K\,|\,W) \\ (K\,|\,W\,|\,W) \\ (W\,|\,W\,|\,W) \end{array} \right\}$$